Να προσεγγιστεί το ολοκλήρωμα

$\int_0^{2\pi} \eta\mu^2 x \, dx$ κάνοντας χρήση των σύνθετων κανόνων.

1) τραπεζίου και 2) Simpson με $h=\frac{\pi}{3}$.

ΛΥΣΗ

$$Q^{\text{ΤΡΑΠ.}}_{\text{μτ}} = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right)+\dots+\frac{h}{2}\left(f(x_{n-1})+f(x_n)\right) =$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right).$$

Πιο συγκεκριμένα ($x_0=0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_1+h,$

$$Q^{\text{ΤΡΑΠ.}} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sin^2 0}{2}+\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{2\pi}{3}+\sin^2\pi+\sin^2\frac{4\pi}{3}+\sin^2\frac{5\pi}{3}+\frac{\sin^2 2\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\left(0+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0\right)=\pi.$$

$$Q^{\text{SIMPSON}}_{\text{μτ}} = \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\dots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Πιο συγκεκριμένα

$$Q^{\text{SIMPSON}} = \frac{\pi}{9}\left(\sin^2 0+4\sin^2\frac{\pi}{3}+2\sin^2\frac{2\pi}{3}+4\sin^2\pi+2\sin^2\frac{4\pi}{3}+4\sin^2\frac{5\pi}{3}+\sin^2 2\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(0+4\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}+4\cdot 0+2\frac{3}{4}+4\frac{3}{4}+0\right)=\pi.$$